BEQUES DEL MUSEU DE L'HOSPITALET 1993-94

MEMORIA DEL PROJECTE:

# MODELS INHOMOGENIS

# DE

# RELATIVITAT GENERAL

Carlos Fernández Sopuerta

Juny-1994.

# 1 INDEX

# 2 INTRODUCCIO

Dins d'aquesta introducció es preten explicar quines són les motivacions, tant de caire històric com de caire purament científic, que donen lloc a un treball d'investigació com aquest. Com ja es va dir a l'informe descriptiu del projecte, l'àmbit de desenvolupament del projecte està dins de la Física Teòrica, i més concretament, dintre de la teoria de la Relativitat General (teoria que descriu les forces i interaccions gravitatòries en sistemes físics). Dins d'aquest marc, l'intenció d'aquest treball és contribuir al desenvolupament de la Relativitat General en la seva vessant relacionada amb la Cosmologia moderna. Per tant, es fa necessari parlar de què es la Cosmologia, quins són els seus objectius, en quin estat es troba avui dia i com contribuiex aquest projecte al seu desenvolupament. Amb aquest motiu, en aquesta introducció s'inclueix un apartat on es tracten aquestes qüestions. Posteriorment, en un segon apartat, s'exposa quins han estat els objectius del treball, com s'han desenvolupat i quina és la seva disposició dins d'aquesta memòria.

## 2.1 Què és la Cosmologia?

Al llarg de la major part de l'història que coneixem de la nostra espècie, sabem que sempre hi ha hagut una gran preocupació i inquietud per intentar conèixer com és el "món" que ens envolta més enllà del planeta on vivim. Qüestions relacionades amb com és l'Univers, quin és el seu origen, com evoluciona amb el temps, etc., han estat sempre presents al pensament humà. Per tant, és lògic afirmar que la disciplina del coneixement humà que avui dia s'encarrega de l'estudi de l'Univers, la qual rep el nom de *Cosmologia*, té uns origens realment molt llunyans. No obstant, durant la major part de l'història de l'humanitat, la Cosmologia ha estat pràcticament exempta en el seu desenvolupament de la component científica, i els seus objectes d'estudi han estat dominats en algunes ocasions per la Mitologia, i en unes altres per la Teologia o la Filosofia, etc. En resum podem dir que la metodologia científica era absent de la Cosmologia fins fa molt poc.

Va ser a principis d'aquest segle i motivat pels avenços de diverses branques de la Física, principalment de l'Astronomia, de l'Astrofísica i de la Física Teòrica, quan l'estudi de l'Univers com un tot, és a dir, la Cosmologia moderna, va començar a ser considerat com una displina científica. Entre aquests avenços cal destacar els següents: per una part el treball començat, tant per astronoms com per astrofísics, al segle passat va culminar a començaments d'aquest segle amb el descobriment de que la concentració de estels al voltant del sistema solar, al qual es troba la Terra, té un final, i que més enllà hi han altres concentracions diferents que es troben bastant lluny de la nostra. Aquestes concentracions d'estels són el que coneixem amb el nom de galàxies, la nostra en concret rep el nom de Via Làctia (el terme anglès és *Milky Way*). Per altra part, també a principis de segle, una nova teoria va aparèixer a la Física Teòrica: la teoria general de la Relativitat, coneguda avui dia amb el nom de Relativitat General. Aquesta teoria de la Gravitació, ideada per Albert Einstein entre els anys 1905 i 1916, va tindre inmediatament una gran importància per la Cosmologia, ja que a partir d'aquesta teoria es van començar a construir, als anys següents de la seva aparició, els primers models cosmològics per descriure l'Univers.

A partir d'aquest moment fins als darrers anys de l'època actual, un seguit de descobriments importants, tant de caire experimental com de caire teòric, s'han produit dins de l'àmbit de la Cosmologia, donant lloc d'aquesta forma a l'esquema que avui dia coneixem amb el nom de Model Estàndar de l'Univers. Aquest model, és el model que tenim actualment per descriure l'estructura i l'evolució a gran escala de l'Univers. Com és lògic, aquest model no està ni de bon tros acabat, no obstant, cada dia són més les branques de la Física que contribueixen al seu desenvolupament (Gravitació, Astrofísica, Astronomia, Física de partícules, Física de procesos no lineals, etc.).

Entre els fonaments teòrics sobre els quals està basat el Model Estàndar de l'Univers cal destacar els següents: per una part tenim l'anomenat Principi Cosmològic, el qual afirma que l'Univers a gran escala és isotrop (això vol dir que totes les direccions a l'Univers són equivalents) i homogeni (això vol dir que tots els punts de l'Univers són equivalents; la conseqüència d'això és que el contingut de massa/energia ha de estar distribuït uniformement a l'Univers, o dit d'una altra manera, que la densitat de massa/energia ha de ser la mateixa a cada punt de l'Univers). Aquest principi va ser enunciat en base a les observacions fetes per l'Astronomia i l'Astrofísica, no obstant, algunes de les observacions fetes recentment fan pensar que l'hipòtesi d'homogeneïtat no és tant certa com en un principi semblava ser. Aquest darrer punt, sobre el qual s'incidirà a l'apartat següent, és un punt clau en la motivació d'aquest projecte d'investigació. Per una altra part tenim la contribució de la Relativitat General, teoria en la que més endavant s'aprofondirà, la qual ens aporta un entorn matemàtic adeqüat del qual podem extreure diversos models per una descripció geomètrica i dinàmica de l'Univers. En aquest sentit cal destacar que el Principi Cosmològic junt amb les equacions d'Einstein de la Relativitat General dóna lloc a un conjunt particular de models, els quals degut als seus descobridors (Friedman, Lemaître, Robertson i Walker, de forma independent, al voltant de la dècada de 1920) es van anomenar models FLRW. L'importància d'aquests models és deguda al fet de que el Model Estàndar es va desenvolupar al seu entorn, i a més cal destacar que ho va fer amb bastant éxit, ja que ha obtingut bons resultats a la major part de prediccions que a partir d'ell s'han fet.

En quant als fonaments experimentals i observacionals del Model Estàndar és important assenyalar, entre els fets més destacats en pro d'aquest model, els següents:

-dóna una explicació teòrica de la llei de Hubble (també coneguda com llei de corriment cap al vermell), llei que Edwin Hubble va trobar al voltant de 1930 mitjançant observacions de diferents galaxies. Aquesta llei ens diu que la velocitat d'allunyament de les galaxies és proporcional a la seva distància respecte a nosaltres. Dintre del Model Estàndar aquesta llei experimental s'explica com una conseqüència del fet de que l'Univers es troba en expansió.

-un altre fet important que està explicat pel Model Estàndar de l'Univers és el de l'existència d'un fons còsmic de radiació electromagnètica de microones (habitualment a física per fer menció d'aquesta radiació es fan servir els termes anglesos "Cosmic Microwave Background"), la qual va ser predita per Gamow a l'any 1948 i més tard detectada experimentalment per Penzias i Wilson a l'any 1965. Actualment, gràcies a les recents observacions que tenim, fetes pel satèl.lit COBE de la NASA, se sap que l'espectre d'aquesta radiació coincideix amb molta precisió amb el d'una radiació tèrmica de cos negre a 2.735 graus Kelvin (uns 270 graus centígrads sota zero). L'existència d'aquesta radiació s'explica al Model Estàndar com una relíquia del passat primitiu calent de l'Univers.

-A partir de l'existència del fons còsmic de radiació de microones i utilitzant els models cosmològics FLRW, el Model Estàndar dóna explicació d'un altre fet molt important com és la formació d'abundàncies dels elements químics més lleugers (heli, liti, triti, beril.li, etc.) a l'Univers primitiu. Aquest procés que rep el nom de Nucleosíntesi Primordial ha estat molt important per la Cosmologia degut a la trascendència que ha tingut per les prediccions que s'han anat fent posteriorment.

Fins aquest moment s'ha fet una exposició de què és la Cosmologia i com és el principal model que s'ha desenvolupat. Una informació molt més extensa sobre aquest tema es pot trobar a les referències [7], [12], [14] i [19].

## 2.2 Motivació i descripció del projecte

A l'apartat anterior, entre altres coses, s'ha fet una exposició dels fets més importants que recolzen el Model Estàndar. En contrast amb això, ara veurem alguns fets concrets dels quals, o bé no ens una dóna una explicació satisfactoria, o bé queden fora del seu abast. A partir d'aquí arribarem a la motivació bàsica d'aquest projecte, per passar tot seguit a la seva descripció.

Amb el pas d'aquest segle els sistemes d'observació astronòmics, els mètodes d'exploració astrofísica i l'us de satèl.lits d'observació han millorat molt. Aquest fet fa que actualment coneguem molt millor què hi ha a l'Univers i quin paper juga en ell. Les mesures que s'han fet en aquest sentit a les últimes dècades semblen indicar que l'Univers no és tan homogeni com en un principi es pensava, ja que s'han trobat en ell importants indicis d'inhomogeneïtats a gran escala, o dit d'una altre manera, s'han trobat a l'Univers estructures a una escala major de l'esperada. Entre aquestes estructures podem destacar les següents:

-el buit de Bootes, amb un tamany d'aproximadament 60 megaparsecs (un megaparsec és aproximadament igual a $3.10^{19}$ quilòmetres). Això vol dir que aquest buit és molt més gran que un cúmul de galaxies.

-el filament Piscis-Perseo, amb una longitut d'uns 25 megaparsecs.

-el gran atractor, la massa del qual és aproximadament $10^{16}$ vegades la massa del Sol.

-la concentració de Shapley, amb una massa d'unes $10^{17}$ vegades la massa del Sol.

-la gran muralla, amb una massa d'unes $10^{17}$ vegades la massa del Sol i amb unes dimensions de 5x60x170 megaparsecs.

Per un altre costat, un dels problemes més importants amb els quals s'enfronta la Cosmologia Moderna, aconseguir explicar com s'han format les galaxies, suggereix la necessitat de l'existència d'èpoques en les quals l'Univers era inhomogeni.

Tot això i més ha fet que una de les línies més importants d'investigació actuals a l'entorn de la Cosmologia i la Relativitat General sigui l'estudi de models cosmològics inhomogenis. Aquest estudi implica no fer l'hipòtesi d'homogeneïtat que es fa al Principi Cosmològic, amb la qual cosa el nombre de models cosmològics que es poden trobar solucionant les equacions d'Einstein és pràcticament infinit, tot depèn de què tipus de models es volen trobar i de quins són els mètodes emprats a la resolució de les equacions.

Tota la sèrie de fets i consideracions que s'acaben d'exposar han motivat que l'objectiu d'aquest projecte d'investigació sigui la recerca i posterior estudi de models cosmològics inhomogenis. Com ja s'ha dit anteriorment aquests models cosmològics s'obtenen a partir de la Relativitat General. Amb aquest motiu a l'apartat 3.1. del següent capítol es fa una descripció general d'aquesta teoria de la Gravitació. Seguidament, a l'apartat 3.2, es tracta el problema de trobar i caracteritzar solucions cosmològiques a Relativitat General, per passar a continuació, a l'exposició de la tècnica emprada en aquest projecte per aconseguir trobar nous models cosmològics. El nom d'aquesta tècnica és *la transformació generalitzada de Kerr-Schild*. Després, en els apartats posteriors es presenten les solucions que s'han trobat junt amb les seves principals propietats.

# 3 DESENVOLUPAMENT DEL PROJECTE

En aquesta part de la memòria s'exposa la totalitat del desenvolupament del projecte, des d'els plantejaments inicials (fonaments teòrics), fins als resultats finals als quals s'ha arribat.

## 3.1 La Relativitat General

La Relativitat General com ja s'ha mencionat abans és una teoria de la Gravitació, de la mateixa manera que també ho és la teoria de la Gravitació Universal d'Isaac Newton (1642-1727). Newton va descriure la Gravitació als seus *Principia* (finals del segle XVII) com la causa que opera sobre el sol i els planetes "d'acord amb la quantitat de matèria sòlida que contenen, es propagan-se per tots els costats a distàncies inmenses, decreixen sempre com l'invers del quadrat de les distàncies". Aquest enunciat és el que avui dia coneixem amb el nom de Llei de la Gravitació Universal, la qual ens diu que la força gravitatòria entre dues masses $m_1$ i $m_2$ separades una distància $r$ és atractiva i la seva magnitud ve donada per

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

on

$$G = 6.6732(31) \cdot 10^{-8} dina\, cm^2 g^{-2}.$$

Les masses que apareixen en aquesta expressió s'anomenen masses gravitatòries, en contrast amb les que apareixen a la segona llei de Newton ("La força total que actua sobre qualsevol cos és proporcional a l'acceleració que aquest té"):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{2}$$

Aquesta massa s'anomena massa inèrcial. La sèrie d'experiments fets al llarg del segle passat i durant aquest segle han demostrat que la massa gravitatòria d'un cos qualsevol i la seva massa inercial són iguals. Aquest important fet va portat Einstein a enunciar l'anomenat Principi d'Equivalència, el qual constitueix un dels principis bàsics de la Relativitat General. Aquest principi ens diu que "a cada punt de l'espai-temps en un camp gravitatori és possible escollir un *sistema de coordenades localment inèrcial* tal que, dintre d'una regió suficientment petita al voltant del punt en qüestió, les lleis de la natura prenen la mateixa forma que en els sistemes de coordenades cartesianes no accelerats en absència de gravitació". L'inclusió dins de l'enunciat del Principi d'Equivalència de les paraules *sistema de coordenades localment inèrcial*, fa que les equacions de la Relativitat General hagin de ser escrites en el llenguatje matemàtic de la Geometria Diferencial, la qual té com a origen la Geometria Riemanniana (un ampli tractament d'aquest aparell matemàtic es pot trobar a les referències [3], [5] i [20]). En aquesta geometria, la Geometria Diferencial, l'estructura de l'espai-temps ve descrita pel que anomenem la *mètrica* de l'espai-temps. La mètrica, entre altres coses, és un objecte matemàtic que ens determina la magnitud dels intervals entre diferents succesos que es donen a l'espai-temps. En quant a la seva significació física, s'ha de dir que la mètrica juga a la Relativitat General un paper equivalent al que juga el potencial gravitatori a la teoria newtoniana de la Gravitació, dit d'una altra manera, la mètrica és l'anàleg al potencial gravitatori. En el llenguatje de la Geometria Diferencial la mètrica és el que s'anomena un tensor 2-covariant simètric, la qual cosa significa que la mètrica, que normalment es denota per $g_{\mu\nu}$[1], conté deu funcions, les quals haurem de determinar si volem conèixer les característiques de l'espai-temps que estiguem estudiant.

Com s'acaba de dir, la mètrica és l'objecte matemàtic que necessitem per descriure l'estructura de l'espai-temps, llavors la qüestió que sorgeix de manera immediata és la següent: Com i què es necessita per poder determinar la mètrica d'un espai-temps donat?. La resposta a aquesta pregunta va ser donada per Albert Einstein a l'any 1915. Einstein va trobar quines són les equacions matemàtiques que determinen la mètrica de l'espai-temps. Aquestes equacions s'anomenen les equacions del camp gravitatori, encara que normalment són conegudes amb el nom d'equacions d'Einstein, i com ja s'ha comentat abans, al igual que la resta de les equacions de la Relativitat General, estan escrites en el lleguatje de la Geometria Diferencial. L'expressió d'aquestes equacions és

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

El primer membre d'aquestes equacions està compost per objectes matemàtics relacionats amb la curvatura de l'espai-temps, i per tant, relacionats amb la geometria

[1]Les lletres gregues $\mu$ i $\nu$ són índexs que prenen els valors 0 (normalment per la dimensió temporal), 1, 2 i 3 (normalment per les dimensions espaials).

de l'espai-temps. A més, és important assenyalar que aquest membre de les equacions conté la mètrica (en aquest punt s'ha de tindre en compte que $R_{\mu\nu}$ i $R$ són objectes matemàtics, relacionats amb la curvatura de l'espai-temps, que depenen de la mètrica i de les seves derivades), dins d'aquestes equacions fa el paper d'incògnita. Per altra part, al segon membre de les equacions d'Einstein tenim l'objecte $T_{\mu\nu}$, el qual habitualment es coneix amb el nom de tensor d'energia-moment. Aquest objecte té una gran importància, ja que és l'objecte que descriu com és la distribució de massa/energia a l'espai-temps.

A grans trets, es pot afirmar que les equacions d'Einstein relacionen el contigut material d'un espai-temps qualsevol amb la seva geometria, i al igual que s'ha dit que la mètrica a Relativitat General és l'anàleg al potencial gravitatori newtonià, es pot dir que les equacions d'Einstein són les equacions anàlogues a l'equació newtoniana del potencial gravitatori ( aquesta darrera es pot trobar a la major part dels textos de batxillerat), i que relaciona el potencial gravitatori amb la distribució de massa al espai, és a dir, amb la densitat de massa. Dit això, ara veurem com es pot conèixer quina és l'estructura d'un espai-temps determinat. En primer lloc, hem de saber quin és i com està distribuït el contigut de massa/energia d'aquest espai-temps. Amb això construirem el tensor de energia-moment corresponent, el qual colocarem, acte seguit, a les equacions d'Einstein. Una vegada fet, l'únic pas que ens resta és resoldre aquestes equacions per obtindre finalment la mètrica de l'espai-temps en qüestió. No obstant, s'ha de tindre en compte, que de moment, això no és res més que la teòria dels pasos que hem de seguir per resoldre les equacions d'Einstein, i per tant, aquests pasos que s'acaben de descriure, en especial el darrer, poden portar moltes dificultats tècniques. En aquest sentit, és important notar que aquestes equacions són equacions diferencials no lineals en derivades parcials, la qual cosa fa que la seva resolució sigui extremadament complicada a la major part dels casos. De tota manera, en els següents apartats d'aquest capítol veurem de quina manera la tècnica que s'ha proposat en aquest projecte aconsegueix superar aquestes dificultats donant lloc a noves solucions cosmològiques de les equacions d'Einstein.

Per finalitzar aquest apartat sobre la teoria de la Relativitat General és important remarcar que aquesta teoria de la Gravitació ha significat un gran avanç respecte a la teoria newtoniana. Entre els fets més destacats, que abans no trobaven explicació a cap teoria, i dels quals la Relativitat General ha donat una explicació satisfactòria cal destacar els següents: la precesió del periheli de Mercuri, la desviació de la llum al passar prop d'objectes amb molta massa, els canvis per corriment al vermell de l'espectre de la radiació electromagnètica per efectes gravitatoris, el retard temporal de la llum, la possible existència d'ones gravitatòries, etc. Una exposició molt més detallada de la Relativitat General es pot trobar a les referències [3], [6] i [20].

## 3.2 Models cosmològics de Relativitat General

Al darrer apartat, s'han explicat quins són els fonaments bàsics de la Relativitat General, i entre altres coses, s'ha parlat de les equacions d'Einstein, de quin és el seu significat físic i de què vol dir, a grans trets, trobar solucions d'aquestes equacions. Al llarg d'aquest apartat ens centrarem en el problema de trobar solucions cosmològiques de aquestes equacions i de com es caracteritzen aquestes.

Trobar solucions cosmològiques de les equacions d'Einstein, o dit d'una altra manera, trobar models cosmològics, vol dir que hem de considerar l'Univers com a l'espai-temps de la Relativitat General. Per tant, el tensor d'energia-moment que apareix al segon membre de las equacions d'Einstein (3), ha de descriure el contingut de massa/energia de l'Univers. Això a Relativitat General normalment es fa agafant un tensor d'energia-moment de tipus fluid-perfecte. L'expressió d'un tensor d'aquest tipus ve donada per[2]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \tag{4}$$

En aquesta equació $u_\mu$ és el camp de velocitats del fluid, el qual representa la velocitat mitjana de la matèria a cada punt de l'espai-temps, $p$ és la pressió isotròpica del fluid i $\rho$ és la densitat total de massa/energia del fluid que mesuraria qualsevol observador que tingués a $u_\mu$ com a camp de velocitats. A més d'això, habitualment a aquesta descripció del contingut de l'Univers com un fluid-perfecte se li afegeix una equació d'estat per la matèria (això significa donar una relació entre la densitat $\rho$ i la pressió $p$). Per altra part, també es solen imposar unes restriccions de caràcter físic sobre la densitat $\rho$ i la pressió $p$ del fluid, anomenades *condicions d'energia*. Aquestes

[2] Aquesta expressió és vàlida en un sistema d'unitats físiques en el qual es tingui que $8\pi G = c = 1$. On $G$ és la constant gravitatòria i $c$ és la velocitat de la llum en el buit.

condicions d'energia exigeixen que la densitat total de massa/energia sigui positiva, és a dir,

$$\rho > 0,$$

i que a més, es cumpleixi una de les dues següents condicions

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \rho + p > 0, \\ &\text{b)} \quad \rho + 3p > 0. \end{aligned}$$

La primera d'aquestes condicions s'anomena condició d'energia feble, mentre que la segona s'anomena condició d'energia forta.

Per altra part, aquest fluid-perfecte, amb el qual s'està descrivint el contingut material de l'Univers, està caracteritzat per unes quantitats cinemàtiques que a continuació es mostraran i que depenen només del camp de velocitats del fluid $u_\mu$. Aquestes quantitats són:

-L'expansió del fluid $\theta$. Aquesta quantitat ens dóna el ritme de canvi de la distància entre partícules del fluid en un entorn de l'espai-temps. Tenint en compte que el fluid representa el contingut material de l'Univers, aquestes partícules seran cúmuls de galàxies. L'expressió de la qual s'obté aquesta quantitat cinemàtica a partir del camp de velocitats és

$$\theta = \nabla_\mu u^\mu. \tag{5}$$

-L'acceleració del fluid $a^\mu$. L'acceleració del fluid és un camp de vectors, ortogonal al camp de velocitats del fluid, que representa els efectes combinats de les forces gravitatòries i inèrcials sobre el fluid. La seva expressió és

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \tag{6}$$

-La distorsió del fluid $\sigma_{\mu\nu}$. La distorsió del fluid és un camp de tensors, simètric, que determina la distorsió que s'origina al si del flux del fluid, deixant invariant el volum. La seva expressió és

$$\sigma_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} u_{\nu)} + a_{(\mu} u_{\nu)} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \tag{7}$$

amb

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu.$$

-La vorticitat del fluid $\omega_{\mu\nu}$. La vorticitat del fluid és un altre camp de tensors, en aquest cas antisimètric, que determina una rotació rígida dels cúmuls de galàxies respecte a un sistema inèrcial local en repòs. La seva expressió és

$$\omega_{\mu\nu} = \nabla_{[\nu} u_{\mu]} + a_{[\mu} u_{\nu]}. \tag{8}$$

A partir de la vorticitat i del camp de velocitats del fluid s'introdueix el vector de vorticitat $\omega^{\mu}$, l'expressió del qual ve donada per

$$\omega^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma} u_{\nu} \omega_{\rho\sigma}. \tag{9}$$

Després d'aquesta exposició sobre la caracterització d'un model cosmològic passarem a introduir, en el següent capítol, el mètode emprat en aquest projecte per trobar nous models cosmològics. Per altra part, una discussió més detallada sobre el tema d'aquest apartat es pot trobar a les referències [1] i [3].

## 3.3 La transformació generalitzada de Kerr-Schild per a fluids perfectes

En aquest apartat es descriu la transformació generalitzada de Kerr-Schild per a fluids perfectes, que com ja s'ha dit, és la tècnica que s'ha utilitzat en aquest projecte per trobar nous models cosmològics inhomogenis a partir de les equacions d'Einstein de la Relativitat General. Aquesta tècnica té el seu origen en un mètode que va ser iniciat per Kerr i Schild (veure la referència [4]), i que per aquest motiu es va denominar "la transformació de Kerr-Schild". Originalment, Kerr i Schild van desenvolupar aquest mètode per trobar només solucions de buit, és a dir, pel cas en el qual l'espai-temps no conté ni massa ni energia (amb la qual cosa a les equacions d'Einstein (3) s'ha de posar $T_{\mu\nu} = 0$). Un dels grans esdeveniments a Relativitat General va arribar quan Kerr, amb aquest mètode que ell va iniciar junt amb Schild, va obtindre, a l'any 1963, la solució més general possible per descriure el camp gravitatori a l'exterior d'un forat negre amb simetria axial. En els anys següents a l'aparició d'aquesta tècnica, es van desenvolupar generalitzacions pel cas en el qual l'espai-temps es buit però hi ha present un camp electromagnètic, cas en el qual les equacions d'Einstein es solen anomenar equacions d'Einstein-Maxwell, i pel cas en el qual el contingut de l'espai-temps és el que s'anomena "radiació pura". Aquestes generalitzacions que s'acaben de citar, com es por veure al capítol 28 de la referència [5], van donar lloc a uns resultats bastant bons, ja que es van obtindre un gran nombre de noves solucions de les equacions d'Einstein. Anys més tard es va començar a estudiar la generalització d'aquesta tècnica, la qual es coneix amb el nom de "la transformació generalitzada de Kerr-Schild", i té l'avantatge que es pot aplicar a qualsevol tipus d'espai-temps. L'intenció principal, tant de la transformació de Kerr-Schild com de la seva generalització, és intentar trobar noves solucions de les equacions d'Einstein partint de solucions ja conegudes. Aquest fet es pot veure directament a la expressió matemàtica de la transformació generalitzada de Kerr-Schild, la qual s'escriu de la següent forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2H\ell_\mu\ell_\nu. \tag{10}$$

En aquesta expressió $g_{\mu\nu}$ és la mètrica suposadament coneguda, a la qual s'aplica la transformació, i que a partir d'ara anomenarem *mètrica llavor*. Aquesta mètrica pot ser en principi la mètrica de qualsevol espai-temps conegut. Després, al primer membre d'aquesta identitat tenim $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que és la mètrica que s'obté amb l'aplicació d'aquesta tècnica i que a partir d'ara anomenarem *mètrica KS* (mètrica de Kerr-Schild). Al segon membre tenim $\ell^\mu$, que és un camp de vectors isòtrop i geodèsic per ambdues mètriques, per la llavor i per la KS. I per últim tenim $H$, que és simplement un camp escalar.

A partir de l'expressió de la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10) i de les equacions d'Einstein (3) s'arriba a la següent relació entre el tensor d'energia-moment de la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$, el qual designarem per $T_{\mu\nu}$, i el tensor d'energia-moment de la mètrica KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que designarem per $\tilde{T}_{\mu\nu}$ :

$$\ell^\mu\tilde{T}_{\mu\nu} = \ell^\mu T_{\mu\nu} + F\,\ell_\nu, \tag{11}$$

on $F$ és un camp escalar. A partir d'aquesta relació se segueix que no es poden trobar mètriques KS de fluid-perfecte (és a dir, amb un tensor d'energia-moment de tipus fluid-perfecte) partint de mètriques llavor de buit o de mètriques llavor amb un tensor d'energia-moment que tingui a $\ell^\mu$ com un autovector.

Aquest darrer fet que s'ha exposat és bastant important, ja que ens dóna el motiu de perquè no es poden trobar mètriques KS de fluid-perfecte amb la transformació de Kerr-Schild original. El motiu és que la transformació original emprava la mètrica de

Minkowski (la mètrica de la teoria Especial de la Relativitat), la qual és una mètrica d'un espai-temps buit, com a mètrica llavor.

Fins que J.M.M. Senovilla i col.laboradors, van desenvolupar un mètode per trobar mètriques de fluid-perfecte mitjançant la transformació generalitzada de Kerr-Schild, el qual va ser descrit a les referències [8], [9] i [15], no s'havia trobat encara cap mètrica de fluid-perfecte mitjançant la tècnica de la transformació de Kerr-Schild. Aquest mètode desenvolupat per J.M.M. Senovilla i col.laboradors utilitza les mètriques conformement planes de fluid-perfecte com a mètriques llavor. L'avantatge de fer això és que totes les mètriques conformement planes de fluid-perfecte són conegudes, i es divideixen en dos grups diferenciats: per una part tenim les mètriques de Friedmann generalitzades (aquestes mètriques contenen les mètriques FLRW) i per altra part les mètriques interiors de Schwarzschild generalitzades (aquestes contenen la mètrica de Schwarzschild interior). Aquestes mètriques, les quals van ser trobades per H. Stephani, es poden veure al capítol 32 de la referència [5].

Una vegada s'ha escollit les mètriques llavor com mètriques conformement planes de fluid-perfecte, s'ha de passar a estudiar com es poden trobar, a partir d'aquestes, les mètriques KS, les quals també han de ser mètriques de fluid-perfecte, ja que estem intentant trobar models cosmològics. Això es va fer estudiant les equacions d'Einstein per a les mètriques KS. Els resultats d'aquest estudi es poden classificar, com es pot veure a les referències [8] i [15], en els següents dos punts:

- Per una part obtenim: la densitat $\tilde{\rho}$, la pressió $\tilde{p}$ i el camp de velocitats $\tilde{u}^\mu$ de les mètriques KS com funcions de la densitat $\rho$, la pressió $p$ i el camp de velocitats $u^\mu$ de les mètriques llavor, del camp escalar $H$ i de les seves derivades $\partial_\alpha H$.

- I per altra part tenim un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials per al camp escalar $H$. En aquest punt, apareixen dos casos ben diferenciats depenen de si el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ té o no té distorsió. La resolució d'aquests casos es tractaran en apartats diferents.

Del primer d'aquests dos punts, i una vegada conegut el camp escalar $H$, es troben les quantitats que defineixen el fluid-perfecte associat a les mètriques KS (densitat, pressió i camp de velocitats), o dit d'una altra manera, es troba el tensor d'energia-moment associat a les mètriques KS. Per tant, el que s'haurà de fer, és resoldre el sistema d'equacions diferencials en derivades parcials del segon punt per tal de trobar $H$.

Per tal d'atacar aquest problema, a partir del mètode desenvolupat per J.M.M. Senovilla i col.laboradors, vam dissenyar un programa sistemàtic per tal de trobar mètriques KS de fluid-perfecte (veure la referència [16]), que a continuació descriurem. Aquest procediment general per trobar mètriques KS de fluid-perfecte es divideix en dues parts ben diferenciades. La primera part consisteix en construir teoremes que ens defineixin les mètriques KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$ a través de les mètriques llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^{\mu}$. Els pasos que cal seguir per tal de trobar aquests teoremes són els següents:

1) Fer algunes suposicions adequades sobre $g_{\mu\nu}$ i $\ell^{\mu}$. L'objectiu principal d'aquest pas és simplificar el sistema d'equacions diferencials en derivades parcials per $H$, de manera que es puguin resoldre de manera exacta. Un exemple de l'aplicació d'això, és utilitzar aquestes suposicions per aconseguir que aquest sistema d'equacions diferencials sigui lineal.

2) Trobar les condicions d'integrabilitat del sistema d'equacions diferencials que tenim per $H$. I per tant, a través de les condicions d'integrabilitat, d'aquí obtindrem algunes restriccions sobre $g_{\mu\nu}$ i $\ell^{\mu}$.

Amb aquest esquema es pot construir una gran varietat de teoremes per trobar noves mètriques KS de fluid-perfecte (alguns exemples de teoremes es poden trobar a les referències [8], [9] i [15]). L'esquelet d'aquests teoremes és:

**TEOREMA:** "Sigui $g_{\mu\nu}$ una mètrica conformement plana i de fluid-perfecte, i sigui $\ell^{\mu}$ un camp de vectors isòtrop i geodèsic sobre $g_{\mu\nu}$, tals que verifiquin les

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{suposicions sobre}\\ g_{\mu\nu} \text{ i } \ell^{\mu}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{restriccions sobre}\\ g_{\mu\nu} \text{ i } \ell^{\mu}\end{array}}.$$

Llavors, podem resoldre el sistema *integrable* per $H$. La nova mètrica KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$, donada per la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10), és una solució de les equacions d'Einstein per a un tensor d'energia-moment de tipus fluid-perfecte, on $(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{u}^{\mu})$ estan donades com funcions de $(\rho, p, u^{\mu})$ i $(H, \partial_{\alpha} H)$".

La segona part d'aquest procediment general que estem descrivint, consisteix en obtindre, a partir de cada teorema, la mètrica KS de fluid-perfecte més general possible. La realització d'aquesta part s'ha de portar a terme en dos pasos:

1) Trobar la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ més generals possible, tals que cumpleixin les condicions del teorema en qüestió. En aquest punt, és important assenyalar que la tècnica que s'utilitza és l'anomenat formalisme de Newman-Penrose (veure la referència [10]), el qual ens proporciona l'entorn matemàtic més adequat per tal d'aconseguir els objectius proposats en aquest punt. Amb aquest formalisme, trobem la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$, mitjançant l'integració de les equacions de Newman-Penrose[3] (junt amb les identitats de Bianchi i les condicions que imposi el teorema) en un sistema de coordenades adient.

2) Integrar el sistema compatible d'equacions diferencials en derivades parcials per al camp escalar $H$. Una vegada fet això, obtindrem directament la mètrica KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$ més general possible, a través de l'expressió de la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10).

Fins aquest punt s'ha exposat el procediment a seguir per aplicar la tècnica de la transformació generalitzada de Kerr-Schild per a fluids perfectes. En els apartats següents es presenta la seva aplicació a diversos casos junt amb els resultats que a partir d'ells s'han obtingut.

## 3.4 Solucions per al cas amb distorsió: $\sigma \neq 0$

En aquest apartat aplicarem el procediment general que s'ha descrit amb detall a l'anterior apartat. En un dels punts del procediment, en concret al de l'obtenció del sistema d'equacions diferencials en derivades parcials per $H$, s'ha dit que hi apareixien dos casos clarament diferenciats depenen de si el camp de vectors isòtrop i geodèsic $l^\mu$ té o no distorsió. Doncs bé, en aquest apartat s'estudiarà el cas en el qual aquest camp si té distorsió.

A continuació, anirem seguint el pasos del programa sistemàtic que s'ha descrit.

[3] Aquestes són les equacions equivalents a les equacions d'Einstein en el formalisme de Newman-Penrose.

No obstant, en aquesta memòria s'exposaran només els resultats generals als quals ha portat aquest procediment, sense detallar els càlculs que ens hi han portat, principalment degut a que, per una part la seva inclusió a la memòria no aportaria gaire llum més sobre els continguts que s'exposen, i a que per altra part, la mida dels càlculs sobrepassaria àmpliament l'extensió adient per una memòria com aquesta. Dit això, passarem a veure quines són les principals característiques i els resultats del cas que en aquest apartat s'està tractant.

A partir de l'estudi de les equacions d'Einstein per aquest cas, s'obté el següent teorema (veure les referències [8], [15] i [17]):

**Teorema 1:** "Sigui $g_{\alpha\beta}$ una mètrica conformement plana de fluid-perfecte, i sigui $\ell^\alpha$ un camp de vectors isòtrop, geodèsic i amb distorsió tals que verifiquin les següents condicions

$$\varrho = \bar{\varrho}, \tag{12}$$

$$\Phi_{oo} = \varrho^2 - \sigma\bar{\sigma}, \tag{13}$$

$$\pi = 0, \tag{14}$$

$$\bar{\sigma}\delta\tau + \bar{\sigma}\tau(\bar{\alpha} - \beta) = \sigma\bar{\delta}\bar{\tau} + \sigma\bar{\tau}(\alpha - \bar{\beta}), \tag{15}$$

$$\triangle\tau = 3\bar{\lambda}\bar{\tau} + \tau(\mu + \gamma + \bar{\gamma}) + \tau\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}} + 2\varrho\nu, \tag{16}$$

les quals són coherents i possibles. Llavors, el camp escalar $H$, solució del següent sistema d'equacions diferencials *integrable*

$$DH = 0, \tag{17}$$

$$\triangle H = -\left[2(\mu + \gamma + \bar{\gamma}) - 2\varrho\frac{\bar{\lambda}}{\sigma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau^2}{\sigma} + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}\right) - \varrho\frac{\tau\bar{\tau}}{\sigma\bar{\sigma}}\right] H, \tag{18}$$

$$\delta H = \left[\tau + \varrho\frac{\bar{\tau}}{\sigma} - 2(\bar{\alpha} + \beta)\right] H, \tag{19}$$

defineix una nova mètrica KS $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ a través de la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10), la qual és una solució de les equacions de camp d'Einstein per a un tensor d'energia-moment de tipus fluid-perfecte, on la densitat de massa/energia $\tilde{\rho}$, la pressió $\tilde{p}$ i el camp de velocitats $\tilde{u}^\alpha$ del nou fluid perfecte estan donades per les següents expressions

$$\tilde{q} = q + 2H\Phi_{oo}, \tag{20}$$

$$\tilde{p} = p + 2H\Phi_{oo}, \tag{21}$$

$$(\ell^\alpha \tilde{u}_\alpha)^2 = \frac{(\ell^\alpha u_\alpha)^2}{1 + 2H(\ell^\alpha u_\alpha)^2} \quad , \tag{22}$$

$$m^\alpha \tilde{u}_\alpha = 0, \tag{23}$$

on $\rho$, $p$ i $u^\alpha$ són la densitat de massa/energia, la pressió i el camp de velocitats del fluid perfecte llavor".

El tipus de Petrov de les mètriques KS definides pel Teorema 1, ve donat pel següent teorema, el qual va ser provat a [8]:

**Teorema 2:** "Totes les noves mètriques KS $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ definides pel *Teorema 1* són del tipus D de Petrov. A més, el camp de velocitats del fluid perfecte $\tilde{u}^\alpha$ no està al 2-espai generat per els dos autovectors isòtrops dobles del tensor de Weyl".

Per tant, las noves mètriques KS pertanyen a la classe 2 de la classificació de Wainwright per a les mètriques de fluid-perfecte del tipus D de Petrov [18]. Aquest teorema, va ser deduït directament de les expressions dels escalars del tensor de Weyl per les mètriques KS. Aquests escalars tenen les següents expressions

$$\tilde{\Psi}_o = \tilde{\Psi}_1 = 0 \quad , \quad 3\tilde{\Psi}_2 = -2H\Phi_{oo},$$

$$\tilde{\Psi}_3 = -H\frac{\tau}{\sigma}\Phi_{oo} \quad , \quad \tilde{\Psi}_4 = -H\frac{\tau^2}{\sigma^2}\Phi_{oo}.$$

Ara hem de trobar la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ més generals que satisfacin les condicions del Teorema 1. Com ja es va dir a l'apartat anterior, per aconseguir aquest objectiu hem d'integrar les equacions de Newman-Penrose sota les condicions impostes pel Teorema 1. Per fer això, agafem un sistema de coordenades $\{t, u, x, y\}$, on $t$ és el paràmetre afí de les geodèsiques isòtropes de $\ell^\mu$, $u$ és una etiqueta per les hipersuperfícies isòtropes ortogonals a $\ell^\mu$, i $x$ i $y$ són etiquetes per les dites geodèsiques isòtropes a cada hipersuperfície $u = constant$. Amb aquest sistema de coordenades, i utilitzant els mètodes estàndar per a l'integració de les equacions de Newman-Penrose, els quals es poden trobar, per exemple, a la referència [11], s'obté el següent element de línia per la mètrica llavor més general

$$ds^2 = -2Gdtdu + 2G^2Mdu^2 + t^{1-c}\left(dx + \frac{G_{,x}}{c}t^c du\right)^2 + t^{1+c}\left(dy - \frac{G_{,y}}{c}t^{-c}du\right)^2, \tag{24}$$

on

$$M(t) = 2t\left(at^c + bt^{-c}\right),$$
$$G(x,y) = g(x)h(y),$$
$$g_{,xx} + (2c)^2 ag = h_{,yy} + (2c)^2 bh = 0.$$

En aquestes expression $a$, $b$ i $c$ són constants arbitràries. La densitat $\rho$, the pressió $p$ i el camp de velocitats del fluid perfecte, corresponents a aquestes mètriques llavor, venen donats per

$$q(t) = 3t^{-1}\left[a(1+c)^2 t^c + b(1-c)^2 t^{-c}\right], \tag{25}$$

$$p(t) = -5t^{-1}\left[a(1+c)(1/5+c)t^c + b(1-c)(1/5-c)t^{-c}\right], \tag{26}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{-dt}{\sqrt{2M}}\ ,\ \vec{u} = \sqrt{2M}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{G\sqrt{2M}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{G_{,x}}{c}t^c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_{,y}}{c}t^{-c}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{27}$$

D'aquestes expressions es pot veure clarament que hi ha una equació d'estat, la qual a partir de les expressions (25) i (26), es pot escriure de la següent manera

$$\begin{gathered}\left[(5c+1)q + 3(c+1)p\right]^{1-c}\left[24ac(1+c)\right]^{1+c} = \\ \left[(5c-1)q + 3(c-1)p\right]^{1+c}\left[24bc(1-c)\right]^{1-c}.\end{gathered}$$

Del fet que les mètriques llavor siguin sempre conformement planes i de l'existència d'una equació d'estat a les mètriques llavor que acaben de trobar, es dedueix que aquestes mètriques són mètriques FLRW. L'única quantitat cinemàtica no nula de les mètriques FLRW és l'expansió, la qual en el cas que estem tractant, és

$$\theta(t) = \frac{3M_{,t}}{\sqrt{2M}}. \tag{28}$$

Per altra part, el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ té la següent forma

$$\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\ell} = -Gdu,$$

Una vegada hem trobat la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ més generals possibles, el següent pas és trobar el camp escalar $H$. Per aconseguir-ho, hem de resoldre el sistema d'equacions diferencials en derivades parcials integrable i de primer ordre que apareix al Teorema 1. Fent-ho arribem a la següent expressió per $H$:

$$H(x,y) = \frac{D}{G(x,y)} \left(\frac{g(x)}{h(y)}\right)^{\frac{1}{c}},$$

on $D$ és una constant arbitrària.

Finalment, mitjançant la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10), trobem l'element de línia de les noves mètriques KS de fluid-perfecte. La seva expressió ve donada per

$$d\tilde{s}^2 = -2Gdtdu + 2G^2\tilde{M}du^2 + t^{1-c}\left(dx + \frac{G_{,x}}{c}t^c du\right)^2 + t^{1+c}\left(dy - \frac{G_{,y}}{c}t^{-c}du\right)^2, \quad (29)$$

on

$$\tilde{M}(t,x,y) \equiv M(t) + H(x,y).$$

La densitat $\tilde{\rho}$, la pressió $\tilde{p}$, i el camp de velocitats $\vec{\tilde{u}}$ del nou fluid perfecte estan definits per les equacions (20)-(23). Les seves expressions estan donades per

$$\tilde{q}(t,x,y) = q(t) + \frac{1-c^2}{2t^2}H(x,y),$$

$$\tilde{p}(t,x,y) = p(t) + \frac{1-c^2}{2t^2}H(x,y),$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{-dt}{\sqrt{2\tilde{M}}}\ ,\ \vec{\tilde{u}} = \sqrt{2\tilde{M}}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{G\sqrt{2\tilde{M}}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{G_{,x}}{c}t^c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{G_{,y}}{c}t^{-c}\frac{\partial}{\partial y}\right). \quad (30)$$

Com es pot veure, a partir de l'expressió de la densitat de massa/energia i de la pressió del fluid perfecte de les noves mètriques KS, no hi ha en general una equació d'estat, llevat del cas en el qual el fluid perfecte associat a les mètriques llavor té una equació d'estat de matèria *rígida*: $p = \rho$. En aquest cas, l'equació d'estat pel fluid perfecte associat a les mètriques KS també és de matèria rígida: $\tilde{p} = \tilde{\rho}$. Per altra part, a partir de les expressions que tenim, també es pot veure que aquestes noves mètriques KS que hem trobat tenen un sol vector de Killing, excepte algún cas en el qual tenen dos. Aquest fet ens indica que les mètriques KS de fluid perfecte que hem trobat tenen un grau molt baix de simètria i per tant són models cosmològics inhomogenis.

Finalment, abans de passar al següent cas, veurem quines són les expressions de les quantitats cinemàtiques corresponents al fluid perfecte associat a las noves mètriques KS. Per una part, l'expansió i l'acceleració són

$$\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{M}{\tilde{M}}}\,\theta + \frac{H}{t\sqrt{2\tilde{M}}}\left(2 + \tilde{F}\right),$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{-H}{2\tilde{M}}\left(\frac{\tilde{F}}{t}dt + \frac{H_{,x}}{H}\,dx + \frac{H_{,y}}{H}\,dy\right),$$

on $\theta$ és l'expansió (28) de les mètriques llavor, les quals com hem vist abans són mètriques FLRW. Per altra part, la rotació d'aquest fluid és nul.la, i les components diferents de zero de la distorsió estan donades per les següents expressions

$$\tilde{\sigma}_{tt} = -\frac{2H}{3t(2\tilde{M})^{3/2}}\left(1 - \tilde{F}\right), \quad \tilde{\sigma}_{tu} = \frac{GH}{3t\sqrt{2\tilde{M}}}\left(2 + \tilde{F}\right),$$
$$\tilde{\sigma}_{uu} = -\frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{\xi})H}{3t\sqrt{2\tilde{M}}}\left(2 + \tilde{F}\right), \quad \tilde{\sigma}_{tx} = \frac{H_{,x}}{(2\tilde{M})^{3/2}}, \quad \tilde{\sigma}_{ty} = \frac{H_{,y}}{(2\tilde{M})^{3/2}},$$
$$\tilde{\sigma}_{ux} = \frac{G_{,x}H}{3c\sqrt{2\tilde{M}}}\left(2 + \tilde{F}\right), \quad \tilde{\sigma}_{uy} = \frac{G_{,y}H}{3c\sqrt{2\tilde{M}}}\left(2 + \tilde{F}\right),$$
$$\tilde{\sigma}_{xx} = \frac{Ht^{-c}}{3\sqrt{2\tilde{M}}}\left(1 - 3c - \tilde{F}\right), \quad \tilde{\sigma}_{yy} = \frac{Ht^{c}}{3\sqrt{2\tilde{M}}}\left(1 + 3c - \tilde{F}\right),$$

a on la funció $\tilde{F}$ és

$$\tilde{F}(t,x,y) \equiv \frac{1}{2\tilde{M}c^2}\left[(1-c)\frac{G_{,x}^2}{G^2}t^{1+c} + (1+c)\frac{G_{,y}^2}{G^2}t^{1-c}\right].$$

## 3.5 Solucions per al cas sense distorsió: $\sigma = 0$

En aquest apartat tornarem a aplicar el procediment general que tenim, però ara l'aplicarem al cas en el qual el camp de vectors isòtrop i geodèsic $l^{\mu}$ no té distorsió. En aquest cas, l'estudi de les equacions d'Einstein ens proporciona el següent teorema (veure les referències [8] i [15]):

**Teorema 3:** "Sigui $g_{\mu\nu}$ una mètrica conformement plana de fluid-perfecte, i sigui $\ell^{\mu}$ un camp de vectors isòtrop, geodèsic i sense distorsió tals que verifiquin les següents condicions

$$\varrho = \bar{\varrho}, \tag{31}$$

$$\pi = 0, \tag{32}$$

$$\Phi_{oo} = C\varrho^2 \quad (C \neq 1 \text{ i } C > 0), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= -\mu\tau(2+C) + \tau(\gamma - \bar{\gamma}) - 2\Lambda\frac{\tau}{\varrho} + \frac{4\tau}{\varrho(1-C)}(\mu\varrho + \Phi_{11} + \Lambda) + \frac{2\tau^2\bar{\tau}}{\varrho(1-C)} + \\ &+ \frac{2\tau\Phi_{11}}{\varrho C}(1-2C), \end{aligned} \tag{34}$$

les quals són coherents i possibles. Llavors, si $V$ és una solució real del següent sistema d'equacions diferencials *integrable*

$$DV = 2V\varrho,$$

$$\delta V = 2\varrho U + (\tau - \bar{\alpha})V,$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= (C-2)\mu V - (\gamma + \bar{\gamma})V + 2V\frac{\Lambda}{\varrho} + 4V\frac{\Phi_{11}}{\varrho} + 2\tau\bar{\tau}\frac{V}{\varrho}\frac{3-C}{(1-C)^2} + \\ &+ \frac{4V}{\varrho(1-C)}(\mu\varrho + \Phi_{11} + \Lambda), \end{aligned}$$

aleshores les funcions $H$ solucions del sistema <u>compatible</u>

$$U = \delta H + 2H\bar{\alpha}, \tag{35}$$

$$V = DH + 2H\varrho, \tag{36}$$

$$\triangle H = -2(\mu + \gamma + \bar{\gamma})H - \mu\frac{V}{\varrho} + 2\tau\bar{\tau}\frac{V}{\varrho^2(1-C)^2} + 2(\mu\varrho + \Phi_{11} + \Lambda)\frac{V}{\varrho^2(1-C)}, \quad (37)$$

on $U$ està donada per

$$U = \frac{\tau\varrho V}{\varrho^2 - \Phi_{oo}} = \frac{\tau V}{\varrho(1-C)},$$

defineix una nova mètrica KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$ a través de la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10), la qual és una solució de les equacions de camp d'Einstein per a un tensor d'energia-moment de tipus fluid-perfecte, on la densitat de massa/energia $\tilde{\rho}$, la pressió $\tilde{p}$ i el camp de velocitats $\tilde{u}^\alpha$ del nou fluid perfecte estan donades per les següents expressions

$$\tilde{q} = q - 2V\varrho + 6H\varrho^2, \quad (38)$$

$$\tilde{p} = p + 2V\varrho + 2H\varrho^2(2C-3), \quad (39)$$

$$\tilde{u}^\mu = -\frac{\sqrt{1 + 2H(\ell^\alpha u_\alpha)^2}}{2(\ell^\alpha u_\alpha)}\ell^\mu - \frac{(\ell^\alpha u_\alpha)}{\sqrt{1 + 2H(\ell^\alpha u_\alpha)^2}}\tilde{k}^\mu, \quad (40)$$

on $\rho$, $p$ i $u^\alpha$ són la densitat de massa/energia, la pressió i el camp de velocitats del fluid perfecte llavor".

El tipus de Petrov de les mètriques KS de fluid-perfecte definides pel Teorema 1, ve donat pel següent teorema, el qual va ser provat a [9]:

**Teorema 4:** "Totes les noves mètriques KS $\tilde{g}_{\mu\nu}$ definides pel *Teorema 3* són del tipus D de Petrov i tenen el camp de velocitats del fluid perfecte $\tilde{u}^\mu$ fora del pla principal definit per l'estructura algebraica del tensor de Weyl".

Ara, seguint els pasos del procediment general, hem de trobar la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ més generals que satisfacin les condicions del Teorema 3. Per tant, hem d'integrar les equacions de Newman-Penrose sota les condicions impostes per aquest teorema. Per tal de fer això, procedirem de la mateixa manera que a l'apartat anterior (cas amb distorsió), és a dir, agafant un sistema de coordenades $\{t, u, x, y\}$, on aquestes coordenades tenen el mateix significat que al cas anterior. Desprès de realitzar l'integració de les equacions de Newman-Penrose, obtenim el següent element de línia per la mètrica llavor més general

$$ds^2 = -2xdtdu + 2x^2Mdu^2 + t^{2m}\left(dx + \frac{1}{1-2m}t^{1-2m}du\right)^2 + t^{2m}dy^2, \quad (41)$$

on

$$m = \tfrac{1}{1+C},$$
$$M(t) = 2at^{2m}.$$

En aquesta expressió $a$ és una constant arbitrària. La densitat $\rho$, the pressió $p$ i el camp de velocitats del fluid perfecte, corresponents a aquestes mètriques llavor, venen donats per

$$q(t) = 12am^2t^{2m-2} \tag{42}$$

$$p(t) = 4am(2-5m)t^{2m-2} \tag{43}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{-dt}{\sqrt{2M}}\ ,\ \vec{u} = \sqrt{2M}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{x\sqrt{2M}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{t^{1-2m}}{2m-1}\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{44}$$

D'aquestes expressions es pot veure clarament que hi ha una equació d'estat, la qual es pot escriure de la següent manera

$$p = \frac{2-5m}{3m}\rho.$$

Com a l'apartat anterior, del fet que les mètriques llavor siguin sempre conformement planes i de l'existència d'una equació d'estat a les mètriques llavor que acaben de trobar, es dedueix que aquestes mètriques són mètriques FLRW. A més, a partir de l'expressió de la densitat de massa/energia i de la pressió, es pot veure que en aquest les mètriques llavor són FLRW-planes, i la seva expansió és

$$\theta(t) = 6\sqrt{a}mt^{m-1}. \tag{45}$$

Per altra part, el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ té la següent forma

$$\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\ell} = -xdu,$$

Ara que ja tenim la mètrica llavor $g_{\mu\nu}$ i el camp de vectors isòtrop i geodèsic $\ell^\mu$ més generals possibles, el següent pas és trobar les funcions $U$ i $V$, i després, a partir d'elles el camp escalar $H$. Integrant els corresponents sistemes d'equacions diferencials que apareixen al Teorema 3 s'arriba a les següents expressions

$$V(t,x) = Dx^{-\frac{4m-1}{2m-1}}t^{-2m},$$

$$U(t,x) = \frac{D}{\sqrt{2}(2m-1)} x^{-2\frac{3m-1}{2m-1}} t^{1-3m},$$

$$H(t,x) = bt^{2m} + \frac{D}{1-4m} x^{-\frac{4m-1}{2m-1}} t^{1-2m},$$

on $b$ i $D$ són constants arbitràries.

Finalment, mitjançant la transformació generalitzada de Kerr-Schild (10), trobem l'element de línia de les noves mètriques KS de fluid-perfecte. La seva expressió ve donada per

$$d\tilde{s}^2 = -2xdtdu + 2x^2\tilde{M}du^2 + t^{2m}\left(dx + \frac{t^{1-2m}}{1-2m}du\right)^2 + t^{2m}dy^2, \qquad (46)$$

on

$$\tilde{M}(t,x,y) \equiv M(t) + H(x,y).$$

La densitat $\tilde{\rho}$, la pressió $\tilde{p}$, i el camp de velocitats $\vec{\tilde{u}}$ del nou fluid perfecte, definits pel Teorema 3, tenen les següents expressions

$$\tilde{q}(t,x,y) = 6(2a+b)m^2t^{2m-2} + 2D\frac{m(1-m)}{1-4m} x^{-\frac{4m-1}{2m-1}} t^{-1-2m},$$

$$\tilde{p}(t,x,y) = 2(2a+b)m(2-5m)t^{2m-2} + 2D\frac{m(1-m)}{1-4m} x^{-\frac{4m-1}{2m-1}} t^{-1-2m},$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \frac{-dt}{\sqrt{2\tilde{M}}} \ , \ \vec{\tilde{u}} = \sqrt{2\tilde{M}}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{x\sqrt{2\tilde{M}}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{t^{1-2m}}{2m-1}\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

En aquest cas, en quant a la possible equació d'estat per al fluid perfecte de les mètriques KS, passa el mateix que al cas anterior, és a dir, només hi ha equació d'estat quan el fluid perfecte associat a les mètriques llavor té una equació d'estat de matèria *rígida*: $p = \rho$. En aquest cas, l'equació d'estat pel fluid perfecte associat a les mètriques KS també és de matèria rígida: $\tilde{p} = \tilde{\rho}$. Per altra part, a partir de les expressions que tenim, es pot veure que, en el cas d'aquest apartat les noves mètriques

KS que hem trobat tenen dos vectors de Killing, a diferència que al cas anterior, en el qual en general hi ha solament un. De tota manera, aquestes mètriques KS de fluid perfecte que hem trobat tenen un grau molt baix de simètria, i per tant, també són models cosmològics inhomogenis. A més, un altre fet que cal destacar, tant de les mètriques KS obtingudes a l'apartat anterior com de les mètriques KS obtingudes en aquest apartat, és que totes contenen les mètriques de FLRW.

# 4 CONCLUSIONS

En aquest capítol farem una recapitulació del contigut que d'aquesta memòria valorant els resultats obtinguts en constrast amb els objectius inicials del projecte.

En primer lloc hem de recordar que l'objectiu principal d'aquest projecte d'investigació ha sigut intentar trobar models cosmològics inhomogenis, mitjançant la teoria de la Relativitat General. Per portar a terme aquest objectiu, s'ha utilitzat una de les diferents tècniques de les quals la Relativitat General disposa per aquest fi, de forma que, mitjançant aquesta tècnica (la transformació generalitzada de Kerr-Schild per a fluids perfectes), hem dissenyat un procediment general per trobar models cosmològics. En aquesta memòria s'han exposat dos casos als quals s'ha aplicat aquesta tècnica. En ambdos casos els resultats han estat bastant bons, ja que s'han trobat, a tots dos, noves solucions de fluid-perfecte de les equacions d'Einstein, les quals tenen les propietats, en les quals, en un principi estavem interesats, és a dir: per una part, aquests models cosmològics que s'han trobat tenen un grau molt baix de simetria, fet que implica que aquests models cosmològics són inhomogenis. I per una altra part, com ja s'ha vist, tots aquests models cosmològics contenen alguns dels models cosmològics FLRW, els quals, com s'ha explicat a l'introducció, són els models en els quals s'ha basat fins ara el Model Estàndar de l'Univers per fer les seves prediccions.

Com a mostra de l'interès dels resultats que en aquesta memòria s'han exposat, cal destacar el fet que la revista internacional de Física Teòrica *Classical and Quantum Gravity* ha acceptat per publicació un article que recull alguns dels resultats aquí trobats, en concret, els que es refereixen al cas amb distorsió. L'altre cas, junt amb possibles futurs resultats en aquest camp d'investigació, seran proposats per publicació més endavant.

A més dels casos aquí estudiats, als apartats 3.3. i 3.4, altres casos han sigut estudiats, però els resultats obtinguts ja són coneguts per la comunitat científica, i per tant es poden trobar a la lliteratura. Per aquest motiu, hem decidit ometre la seva exposició en aquesta memòria.

En resum, podem dir que la tècnica de la Tranformació generalitzada de Kerr-Schild per a fluids perfectes proporciona uns resultats, que fan que aquesta tècnica mereixi un lloc destacat entre els mètodes que avui dia tenim per la recerca de models cosmològics inhomogenis.

# 5 REFERENCIES BIBLIOGRAFIQUES


[1] Ellis, G.F.R. *Relativistic Cosmology.* In General Relativity and Cosmology. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". Academic Press, 1971.

[2] Lorentz, H.A.; Einstein, A.; Minkowski, H.; Weyl, H. *The Principle of Relativity.* Dover Publications, Inc. New York, 1952.

[3] Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. *The large scale structure of space-time.* Cambridge University Press. Cambridge, 1973.

[4] Kerr, R.P.; Schild, A. *Atti Del Convegno Sulla Relatività Generale* (edited by G.Barbéra) p.173. Firenze, 1965. 173.

[5] Kramer, D.; Stephani, H.; Herlt, E.; MacCallum, M.A.H. *Exact solutions of Einstein's field equations.* Cambridge University Press. Cambridge, 1980.

[6] Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *Teoría clásica de los campos.* Editorial Reverté. Barcelona, 1987.

[7] Longair, M.S. *Los orígenes del Universo.* Alianza editorial. Madrid, 1992.

[8] Martín, J.; Senovilla, J.M.M. *Petrov type D perfect-fluid solutions in generalized Kerr-Schild form.* Journal of Mathematical Physics (1986), **27**, p. 265.

[9] Martín-Pascual, F.; Senovilla, J.M.M. *Petrov types D and II perfect-fluid solutions in generalized Kerr-Schild form.* Journal of Mathematical Physics (1988), **29**, p. 937.

[10] Newman, E.T.; Penrose, R. *An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients.* Journal of Mathematical Physics (1962), **3**, p. 566.

[11] Newman E.T.; Tamburino, L.A. *Empty space metrics containing hypersurface orthogonal geodesic rays.* Journal of Mathematical Physics (1962), **3**, p. 902.

[12] North, J.D. *The measure of the Universe.* Dover Publications. New York, 1990.

[13] Peebles, P.J.E. *The large-scale structure of the Universe.* Princeton Series on Physics. Princeton, 1980.

[14] Salvador, E. *L'Univers conegut.* Biblioteca Cultural Barcanova. Barcelona, 1992.

[15] Senovilla, J.M.M. Ph. D. Thesis. Universidad de Salamanca, 1986.

[16] Senovilla, J.M.M.; Sopuerta, C.F. *Nuevas cosmologías de tipo Kerr-Schild.* En Actas de los Encuentros Relativistas Españoles E.R.E. 93. Salas (Oviedo), 1993.

[17] Senovilla, J.M.M.; Sopuerta, C.F. *New $G_1$ and $G_2$ inhomogeneous cosmological models from the generalized Kerr-Schild Transformation.* Classical and Quantum Gravity (1994) (per publicar).

[18] Wainwright, J. *Classification of the type D perfect fluid solutions of the Einstein equations.* General Relativity and Gravitation (1977), **8**, p. 797.

[19] Weinberg, S. *Los tres primeros minutos del Universo.* Alianza editorial. Madrid, 1982.

[20] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons. New York, 1972.

[21] Zel'dovich, Ya.B.; Novikov, I.D. *The structure and evolution of the Universe.* The University of Chicago Press. Chicago, 1983.